Óptica (Apuntes)

Ing. Nanotecnología 2022-1
Universidad Autónoma de Baja California,
Ensenada, Baja California, México.
Dr. Bonifacio Can

January 18, 2022

References

[1] Eugene Hecht, *Óptica*, Addison Wesley, Tercera ed. (2000).

[2] Robert Resnick, David Holliday and Kenneth Krane, *Fśica Vol. 1*, John Willey and Sons. Inc., 4ta Ed (1993).

[3] Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Stanford University, Third Ed (2005).

Nota a los estudiantes

El siguiente escrito es únicamente un resumen y descripción de los conceptos más importantes en la asignatura de óptica y acústica y para profundizar en más conceptos, se requiere revisar la bibliografía.

1 Ondas

Una onda es una perturbación autónoma que se propaga a través de un medio. Existen dos tipos:

- **Longitudinales:** Se considera una onda longitudinal cuando el medio se desplaza en la misma dirección; tal es el caso de las ondas sonoras.
- **Transversales:** Se considera una onda transversal cuando el medio se mueve de manera transversal a la propagación de la onda. En este sentido, el movimiento ocurre de manera perpendicular a la dirección de propagación y se distinguen por flujo de partículas (Ondas EM).

1.1 Onda viajera

Ahora, imaginemos una función Ψ que viaja a través de x a una velocidad constante v. Debido a que la onda está en movimiento Ψ es tanto una función de la posición r como del tiempo t ($\Psi(r,t)$). Por ejemplo: $\Psi(r,t) = A(r)Cos(\phi(r)-\omega t)$.

Nota: Cada una de las funciones de onda, aparecen como soluciones a la ***Ecuación de Onda*** y en cuyo caso, habrá que estudiarlo de una forma más detallada.

Otra característica de las funciones de onda, es que el perfíl no cambia para cualquier instante, es decir, se comporta como un sistema estacionario. Esto es:

$$\Psi(r,t)\Big|_{t=0} = f(r,0) = f(r), \tag{1}$$

Esto puede ser visto, gráficamente como:

Por lo que se puede ver de la figura que la función Ψ ya no es función del tiempo; esto es porque al movernos on S' el perfil se mantiene constate. De tal forma que $\Psi = f(x')$. En otras palabras, la onda viajera se ve igual para cualquier

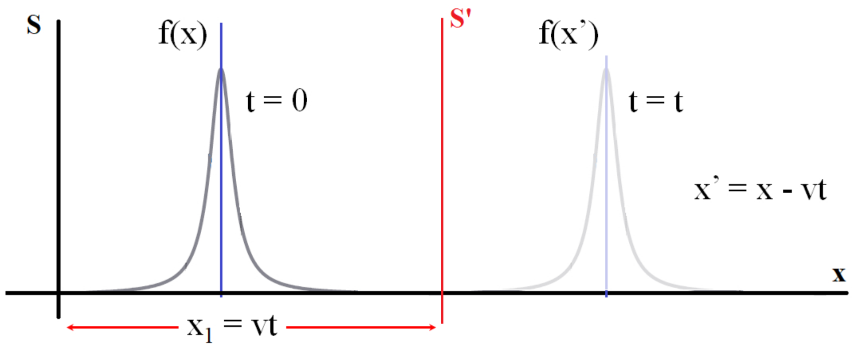

Figure 1: Bosquejo de la propagación de una onda viajera .

valor en t (o en cualquier S') como lo era en S para $t = 0$. Por lo tanto, una onda viajera cumple con la siguiente afirmación.

$$\Psi = f(x') \qquad \Rightarrow \qquad x' = x - vt \qquad \Rightarrow \qquad \Psi(x,t) = f(x - vt), \tag{2}$$

donde $\Psi(x,t) = f(x - vt)$ es básicamente, el sistema representativo de una onda unidimensional. En este sentido, dada una función $f(x)$ se convertirá en una onda viajera a través de la función composición con $g(x) = x - vt$. De tal modo que:

$$f(x) = Ae^{ax^2} \qquad \Rightarrow \text{Transformando a Onda Viajera} \Rightarrow \qquad f(x - vt) = Ae^{a(x-vt)^2},$$

Algo importante a señalar es lo siguiente.

$$\Psi = f(x - vt) \qquad \Rightarrow \text{Onda Viajera con dirección de } +x,$$

$$\Psi = f(x + vt) \qquad \Rightarrow \text{Onda Viajera con dirección de } -x,$$

Supongamos ahora la siguiente función:

$$\Psi_s(x,t) = ASen[k(x - vt)],$$

como es bien sabido, en la función de onda viajera anterior, la función Seno vará de $-A$ a A. Lo anterior se denomina como amplitud de la onda y se puede ver en la siguiente figura:

1.2 Velocidad y Fase

Recordemos una onda viajera que puede representarse como:

$$\Psi_s(x,t) = ASen[k(x \pm vt)], \tag{3}$$

$$\Psi_s(x,t) = ASen\Big[2\pi\Big(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{\tau}\Big)\Big], \tag{4}$$

$$\Psi_s(x,t) = ASen[2\pi(kx \pm \nu t)], \tag{5}$$

$$\Psi_s(x,t) = ASen(kx \pm \omega t), \tag{6}$$

$$\Psi_s(x,t) = ASen\Big[2\pi\nu\Big(\frac{x}{v} \pm t\Big)\Big], \tag{7}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ y representa el numero de onda, λ es la longitud de onda, τ es el periodo de la onda y cuyo inverso es ν (la frecuencia temporal) y por últiomo se tiene a ω que es la frecuencia temporal angular($\omega \equiv 2\pi\nu$).

De la ecuación 6, se le conoce como fase de la onda al argumento de la función seno; $\varphi = kx - \omega t$ y es obvio que para $x = 0$ y $t = 0$, $\varphi = 0$. Un caso especial, se puede escribir como:

$$\Psi(x,t) = ASen(kx - \omega t + \varepsilon),$$

donde $\varepsilon \neq 0$ y se le conoce como fase inicial.

El ángulo de fase inicial es una contribución constante a la fase que se origina en el generador y es independiente del recorrido de la onda en términos del espacio y del tiempo. Esto se puede ver en la diferencia de fase que tienen las siguientes funciones:

$$\Psi(x,t) = ASen(kx - \omega t) \qquad \Rightarrow \text{Fase } \varphi,$$
$$\Psi(x,t) = ASen(\omega t - kx) \qquad \Rightarrow \text{Fase } -\varphi,$$

Teniendo la fase φ, para calcular la rapidéz con el tiempo:

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t \qquad \Rightarrow \qquad \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x\right| = \omega \qquad \Rightarrow \text{Frecuencia angular,} \tag{8}$$

Para calcular la rapidez del cambio de fase con la distancia.

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t \qquad \Rightarrow \qquad \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t\right| = k \qquad \Rightarrow \text{Numero de onda,} \tag{9}$$

Tomemos ahora las ecuaciones 8 y 9

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi = \frac{\left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x\right|}{\left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t\right|} = \pm\frac{\omega}{k} \qquad \Rightarrow \text{Relación de dispersión,} \tag{10}$$

La relación de dispersión, relaciona la longitud de onda o el número de onda de una onda con su frecuencia. A partir de esta relación, se pueden obtener expresiones convenientes para la velocidad de fase y la velocidad de grupo, de las que se determina así el índice de refracción del medio.

La velocidad encontrada en la ecuación 10, es la velocidad con la que se mueve la onda o el perfil de onda viajera.

2 Ondas planas

Consideremos ahora ondas viajeras en el espacio tridimensional generalizando la expresión de la onda para este caso.

$$\Psi(x,t) = A\mathbb{R}e\{e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t - \varepsilon)}\}, \tag{11}$$

con $\overrightarrow{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

En principio, en un tiempo t, Ψ es constante sobre cada uno de los planos, dado que:

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} = cte, \tag{12}$$

Esto viene de la expresión matemática para el plano perpendicular a un vector $\overrightarrow{k}$ cortándose en el punto (x_0, y_0, z_0)

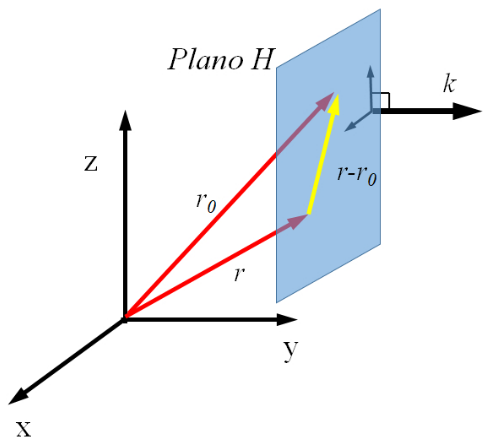

Figure 2: Bosquejo de la ecuación de un plano sobre el que actúan los vectores r, r_0, $r - r_0$ y k .

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{k} = 0,$$

con

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k},$$
$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})\epsilon H \qquad k \perp H,$$
$$\overrightarrow{k} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k},$$

Como

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (x - x_0)k_x + (y - y_0)k_y + (z - z_0)k_z = 0,$$
$$xk_x + yk_y + zk_z = a \qquad \text{y} \qquad x_0k_x + y_0k_y + z_0k_z = a \qquad \text{Resultando} \qquad a - a = 0,$$

Por lo que

$$xk_x + yk_y + zk_z = a \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{k} = cte,$$

Esto representa la forma más concisa de la ecuación de un plano perpendicular a un vector $\overrightarrow{k}$. Donde el plano es el lugar geométrico donde todos los puntos cuyos vectores de posición tienen la misma proyección en la misma direción del vector $\overrightarrow{k}$

Para ver una onda plana viajera, esto se puede ver como:

Entonces, la amplitud y la fase de la onda serán constantes en los planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, dada por $\overrightarrow{k}$. A estos planos de fase constante se les conoce como frentes de onda y a este tipo de onda se les conoce como planas.

3 Ecuación de Onda Electromagnética

Supongamos que no existen cargas o corrientes libres externas en la región de interés. Esto se refiere a que $\rho_t = 0$ y $J_t = 0$. Por lo que las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{13}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{14}$$

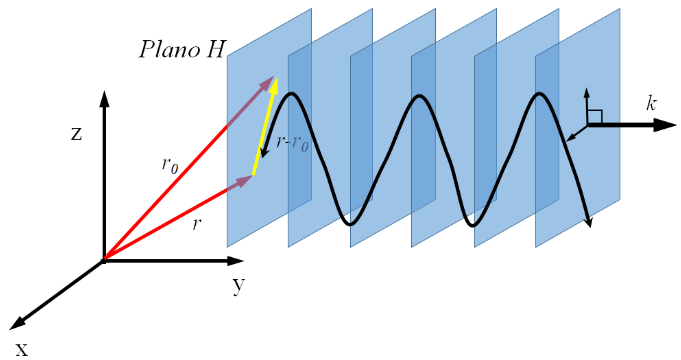

Figure 3: Frente de onda plano .

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{15}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{16}$$

Tomando la ecuación 14,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \Big(- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big), \tag{17}$$

De los recuerdos de tu más tierna infancia, la identidad vectorial

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \overrightarrow{c},$$

Trabajando con la parte izquierda de la ecuación 17, se tiene lo siguiente:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \big(\nabla \cdot \mathbf{E} \big) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

De acuerdo con la ecuación 13 ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$), por lo tanto:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E},$$

Trabajando con la parte derecha de la ecuación 17,

$$\nabla \times \Big(- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big) = -\frac{\partial}{\partial t} \Big(\nabla \times \mathbf{B} \Big) = -\frac{\partial}{\partial t} \Big(\mu_0 \sigma \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Big),$$

dado que se considera un medio libre de cargas, $\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$. Por lo que:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Big(\nabla \times \mathbf{B} \Big) = -\frac{\partial}{\partial t} \Big(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Big) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

Uniendo los resultados de ambas partes de la ecuación 17,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \Big(- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big) \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{18}$$

Con este resultado, se puede demostrar que el las ondas electromagnéticas son solución a la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{\Psi} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial t^2}, \tag{19}$$

4 Reflexión y Refracción en una interfase

Consideremos el problema general de una onda electromagnética incidiendo en una interfase entre dos medios, donde uno puede ser un dieléctrico o un conductor.

Fenomenológicamente, se producen fenómenos de reflexión y de refracción descritos por la Ley de Reflexión y la Ley de Snell, respectivamente. A nivel electromagnético, estas leyes serán consecuencia de la solución a la euación de onda con las condiciones de frontera apropiadas.

Entonces, abordando el problema:

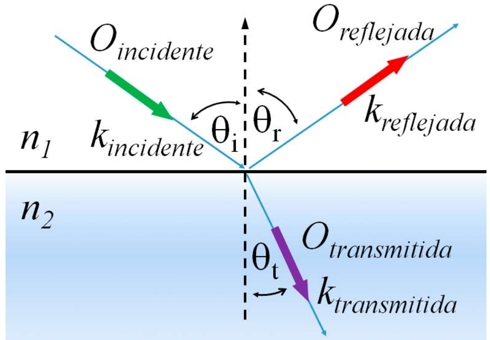

Figure 4: Plano de incidencia que contiene a los Rayos u Ondas incidente, reflejada y transmitida.

Para saber las condiciones a la frontera, comencemos por aplicar la Ley de Gauss sobre una caja.

$$\int \mathbf{E} \cdot ds = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}, \tag{20}$$

donde q_{enc} es la carga encerrada por la caja (Superficie) y ε_0 es la *capacidad inductiva específica del espacio libre* o *constante dieléctrica* de los materiales.

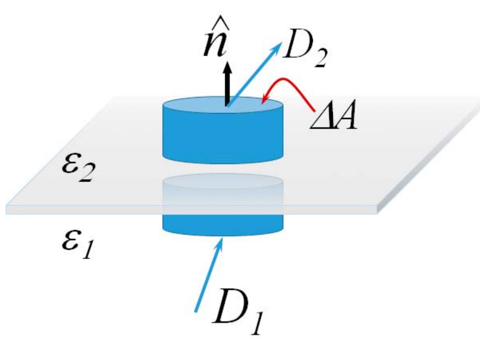

Figure 5: Contribución de la carga en el punto de incidencia

En la figura 5, **D** es el vector de desplazamiento eléctrico con la fuerza del campo magnético y puede expresarse de la siguiente manera:

$$D = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Esto es válido para cualquier superficie y acá se toma el límite cuando $\Delta A \to 0$ (es decir, se ha tomado una caja infinítamente delgada) y por consiguiente,

$$q_{enc} \approx \sigma \Delta A,$$

Es posible observar que la contribución de la carga lateral de la caja será nula, esto debido a la propiedad del producto punto entre dos vectores paralelos. Por lo que la Ley de Gauss, implica que:

$$\hat{n} \cdot \left(\varepsilon_2 \mathbf{E_2} - \varepsilon_1 \mathbf{E_1}\right) = \sigma,$$

que expresa la proyección del vector desplazamiento respecto a la normal (y por ende, con **E**). También, muestra una discontinuidad dada por la densidad de corriente superficial que existe en la interfase.

Ahora, consideremos la componente tangencial de E, por lo que será importante tomar en cuenta la ley de faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

En este sentido, las únicas contribuciones serán por el segmento dl, y en particular para el campo neto, la ley de Faraday en su forma integral queda como:

$$\oint \mathbf{E} \cdot dl = 0,$$

Por lo que la sección que se estará estudiando, será la que se aprecia en la figura 6:

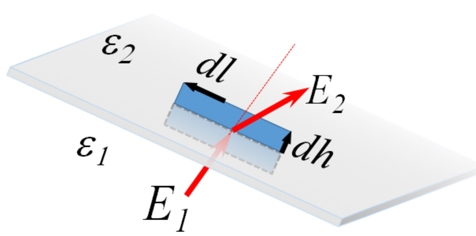

Figure 6: Contribución tangenciales

esto es,

$$\left(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}\right) \cdot dl = 0 \tag{21}$$

dado que en el límite donde $dh \to 0$, las únicas contribuciones a la integral que permanecen finitas son sobre los segmentos dl. Lo que implica que las componentes tangenciales son contínuas al ser dl ortogonal al elemento $\hat{n}$. En este sentido, dado que $dl \perp \hat{n}$ (a través de propiedades entre vectores paralelos y ortogonales), la ecuación 21 puede representarse de la siguiente manera:

$$\hat{n} \times \left(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}\right) = 0 \tag{22}$$

Para el caso particular en donde se tiene una superficie plana y en donde ocurre la incidencia de un rayo que puede ser refractado (transmitido) y reflejado, el campo E

5 Polarización

5.1 Polarización lineal

Una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de Maxwell es que para medios homogeneos e isotrópicos, **E** y **B** son perpendiculares a la dirección de propagación, al vector **k**. El más sencillo de visualizar: Polarización

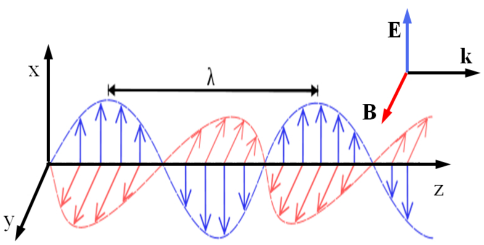

Figure 7: Orientación de la oscilación de los campos **E** y **B**.

Con

$$\mathbf{E_0} = E_{0x}\hat{i} + E_{0y}\hat{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = k\hat{k}, \tag{23}$$

A este tipo de polarización se le conoce como polarización lineal donde cambia la magnitud de $\mathbf{E_0}$ a través del tiempo manteniendo la dirección. Gráficamente, esto se puede ver como:

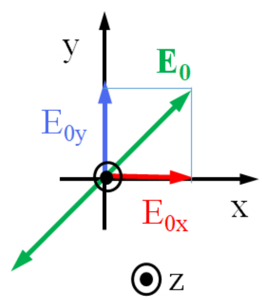

Figure 8: Oscilación del campo **E** a lo largo del eje de propagaciń $\hat{k}$

5.2 Polarización circular

En la polarización circular, se describe una figura geométrica circular a lo largo del eje z ($\hat{k}$). Esto se puede ver como

En este caso, las componentes del campo **E** a lo largo del eje de propagación $\hat{k}$, está dado por:

$$\mathbf{E_0} = E_0(\hat{i} \pm i\hat{j})e^{i(kz-\omega t)}, \tag{24}$$

Tomando el signo negativo de la ecuación 25, se tiene

$$\mathbf{E_0} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{i} - iE_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{j}, \tag{25}$$

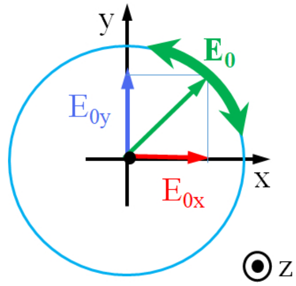

Figure 9: Descripción geométrica circular del campo **E** a lo largo del eje de propagación $\hat{k}$

De la notación de Euler,

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta \qquad \text{para } \theta = -\pi/2 \qquad e^{-i\pi/2} = -i$$

$$\mathbf{E_0} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath} + E_0 e^{-i\pi/2} e^{i(kz-\omega t)}\hat{\jmath},$$

$$\mathbf{E_0} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath} + E_0 e^{i(kz-\omega t-\pi/2)}\hat{\jmath}, \tag{26}$$

La ecuación 26 muestra que la componente en $\hat{\jmath}$ tiene un desfase de $\pi/2$ respeto a la componente en $\hat{\imath}$. Dado que ambas componentes están acompañadas de una función senoidal, ello implica que cuando una componente alcanza su máximo, la otra se tiene un valor de 0. La envolvente de los vectores de $\mathbf{E_0}$ formad por cada posición a lo largo del tiempo, forman un circulo en el plano x y y. Esto se puede ver en la figura siguiente

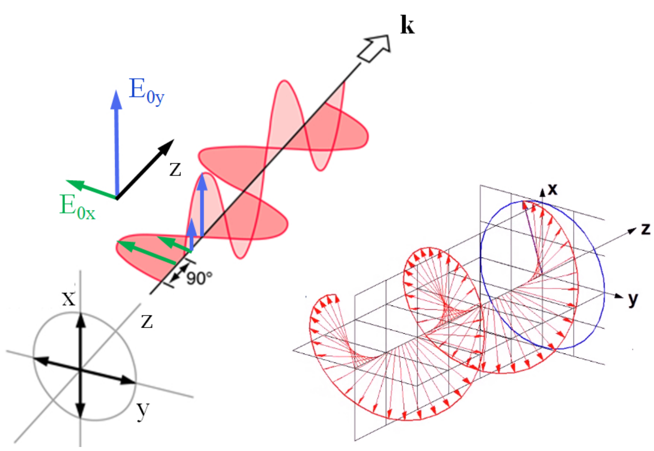

Figure 10: Comportamiento de las componentes desfasadas del campo **E** a lo largo del eje de propagación $\hat{k}$

También a la ecuación 26, se le conoce como polarización circular derecha. En la polarización circular derecha, la magnitud del campo $\mathbf{E_0}$ es constante tanto en el tiempo como en el espacio y únicamente cambia de dirección a lo largo del tiempo.

5.3 Polarización Eliptica

Es el caso más general, y se da cuando las amplitudes de las componentes fuera de fase son arbitrarias

$$\mathbf{E_0} = E_{0x} e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath} \pm iE_{0y} e^{i(kz-\omega t)}\hat{\jmath}, \tag{27}$$

6 Retardadores de $\lambda/2$ y $\lambda/4$

Recordando, se denomina al índeice de refracción como al cociente de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio material. Esto es:

$$n = \frac{c}{v_m}, \tag{28}$$

En los materiales que presentan birrefringencia, el índice de refracción es una función de la dirección. En un cristal anisotrópico (birrefringente), la luz natural se separa en dos haces mutuamente ortogonales que *ven* al cristal con índices de refracción diferentes n_o y n_e (ordinario y extraordinario).

Consideremos una placa delgada de un material birrefringente:

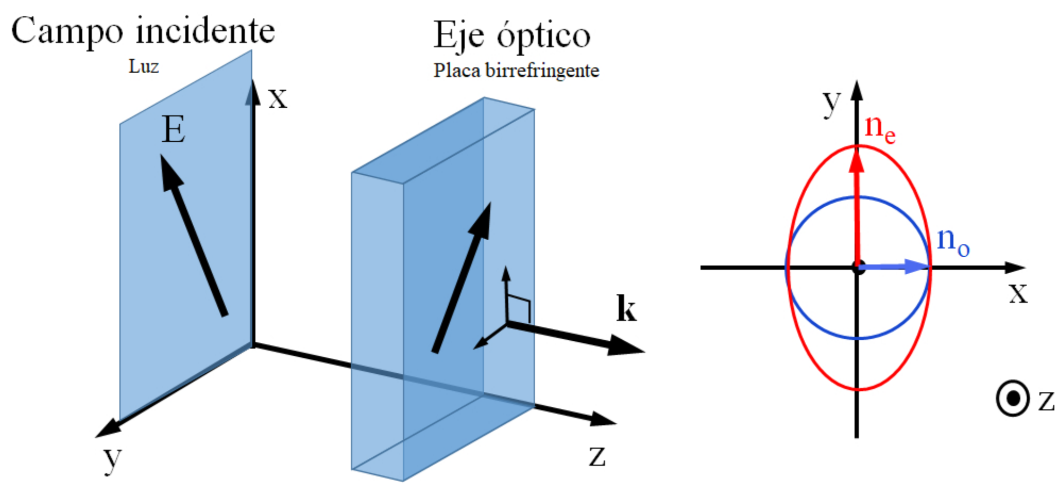

Figure 11: Comportamiento de las componentes desfasadas del campo $\mathbf{E}$ a lo largo del eje de propagación $\hat{k}$

Consideremos también un campo incidente con polarizaciíon lineal,

$$\mathbf{E_{ent}} = (E_{0x}\hat{i} + E_{0y}\hat{j})e^{i(kz-\omega t)} \tag{29}$$

Por lo que al propagarse una distancia d dentro de la placa, las componentes del campo experimentarán una cambio de fase relativo $\Delta\varphi$ dado por $\Delta\varphi = k_0\Lambda$, con $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, $\Lambda = d|n_e - n_o|$ igual a la diferencia de camino óptico.

6.1 Placa $\lambda/2$

Si se escoge un $\Lambda = d|n_e - n_o|$ de tal manera que $\Delta\varphi = \pi$ se tendrá una placa $\lambda/2$, ya que $\Lambda = \lambda/2$. Con la diferencia de fase relativo que experimenta una de las componentes respecto a la otra, el campo $\mathbf{E_0}$ dentro de la placa se puede escribir mediante:

$$\mathbf{E_{mat}} = \left(E_{0x}\hat{i} + iE_{0y}e^{ik_0d|n_e-n_o|}\hat{j}\right)e^{i(kz-\omega t)} \tag{30}$$

Al escoger $\Delta\varphi = k_0d|n_e - n_o| = \pi$, el término $e^{ik_0d|n_e-n_o|} = -1$, por lo que el campo a la salida será

$$\mathbf{E_{sal}} = (E_{0x}\hat{i} - E_{0y}\hat{j})e^{i(kz-\omega t)} \tag{31}$$

Esto es, las componentes experimentan un desfase entre ellas y dan como resultado una rotación (rotación de2θ, donde θ es la dirección de $\mathbf{E_{ins}}$) del campo resultante a la salida del material conservando la magnitud del mismo. Además, es ácil observar que a la salida se tiene un $\mathbf{E_{sal}}$ con polarización lineal.

6.2 Placa $\lambda/4$

Para el caso de los materiales $\lambda/4$, escogemos un $\Delta\varphi = \pi/2$ y haciendo incidir un campo igual al presentado en la ecuación 31 y considerando la expresión 30 que marca el desfase entre las componentes, el campo $\mathbf{E_{sal}}$ queda como:

$$\mathbf{E_{sal}} = (E_{0x}\hat{\imath} + iE_{0y}\hat{\jmath})e^{i(kz-\omega t)} \tag{32}$$

Se tiene a la salida de estos materiales un campo $\mathbf{E_{sal}}$ con polarización lienal.

7 Vectores y matrices de Jones

En clases anteriores se ha descrito a la polarización del campo óptico en términos de observables. En este sentido, partiendo de las componentes del campo $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E}_x(z,t) = E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi_x)}, \tag{33}$$

y

$$\mathbf{E}_y(z,t) = E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi_y)}, \tag{34}$$

lo que implica que los vectores de Jones para los diferentes estados de polarización, pueden ser escritas como:

$$\mathbf{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 e^{\phi_x} \\ E_0 e^{\phi_y} \end{pmatrix} \tag{35}$$

Así mismo, los vectores de Jones se usan únicamente para describir la luz completamente polarizada. Algunos vectores de Jones para los diferentes estados de polarización son:

$$\mathbf{E}(z,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{Polarización Lineal Horizontal Ideal,} \tag{36}$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Polarización Lineal Vertical Ideal,} \tag{37}$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{Polarización Circular Derecha Ideal,} \tag{38}$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{Polarización Circular Izquierda Ideal,} \tag{39}$$

Continuando con el formalismo de Jones, las matrices para algunos elementos ópticos (OE), como polarizadores, elementos que presentan birrefringencia (elementos ópticos $\lambda/2$ y $\lambda/4$) son:

$$EO_{PL} = \begin{pmatrix} cos^2\theta & sen\theta cos\theta \\ sen\theta cos\theta & sen^2\theta \end{pmatrix} \text{Polarizador lineal orientado a } \theta^o, \tag{40}$$

$$EO_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} cos2\theta & sen2\theta \\ sen2\theta & -cos2\theta \end{pmatrix} \text{Retardador de media onda } (\lambda/2), \tag{41}$$

$$EO_{\lambda/4} = e^{i\pi/4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{Retardador de cuarto de onda } (\lambda/4)\text{, con eje rápido vertical,} \tag{42}$$

$$EO_{\lambda/4} = e^{i\pi/4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{Retardador de cuarto de onda } (\lambda/4)\text{, con eje rápido horizontal,} \tag{43}$$

Cabe destacar que las matrices que se presentan en las ecuaciones 40, 41, 42 y 43, son elementos en donde se puede analizar a interacción luz-materia con la incidencia de un campo $\mathbf{E}$ a través de un elemento de polarización.

Uso de las matrices de Jones en sistemas ópticos

Dado que en algunos experimentos en óptica el conocimiento de los estados de polarización es de suma importancia y ya que conocemos las matrices y vectores de Jones para algunos estados de polarización y elementos óptics respectivamente, respectivamente, ahora nos enfocaremos a estudiar su uso en sistemas ópticos. Por ejemplo, si se desea saber cuál es el estado de polarización de la luz a la salida de un sistema óptico como el que se muestra en la figura 12, se debería tomar en consideración el estado de polarización de la luz a la entrada del sistema (A) y los elementos ópticos involucrados (en este caso ($EO1 \longrightarrow \lambda/2$ y $EO2 \longrightarrow PL$). Esto debido a que en la mayoría de los experimentos ópticos esto es posible de conocer.

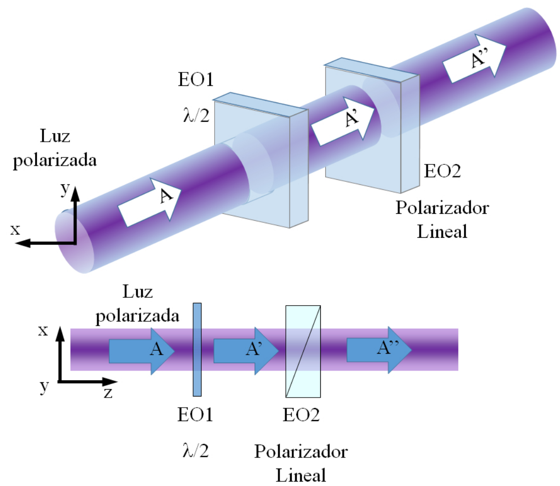

Figure 12: Sistema óptico que permite controlar la intensidad de luz linealmente polarizada y el ángulo de polarización de un haz linealmente polarizado

El procedimiento para determinar el estado de polarización resultado de la figura 12 es relativamente sencillo. Para generalizar este procedimiento primero haremos notar que un sistema óptico es, típicamente, descrito de izquierda a derecha (de acuerdo a la propagación del haz de luz). Como segundo, una vez identificados los elementos ópticos de izquierda a derecha, el estado de polarización resultado es posible obtenerse mediante siguientes ecuaciónes.

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} EO \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{A}), \tag{44}$$

y

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} EO \\ 2 \end{pmatrix} (\mathbf{A}'), \tag{45}$$

Por lo que sustituyendo la ecuación 44 en la ecuación 45, el resultado es:

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} EO \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EO \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{A}), \tag{46}$$

Nota: hay que tener en cuenta que el producto matricial es no-conmutativo, por lo que el orden de las matrices es importante.

Generalizando la ecuación 46 de un sistema que presenta n elementos ópticos, como se muestra en la figura 13, la ecuación para conocer el estado de polarización resultado es el siguiente:

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} EO \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EO \\ n-1 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} EO \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EO \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EO \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{A}), \tag{47}$$

Es fácil notar que el esquema de la estrcturación de la ecuación 47, va de derecha a izquierda (contrario a la propagación del haz y de la descripción del sistema óptico). Además, el tamaño de las matrices A, A', $A''...A^n$, es de 2×1, mientras que los elementos EO_1, EO_2... EO_n, son matrices de 2×2.

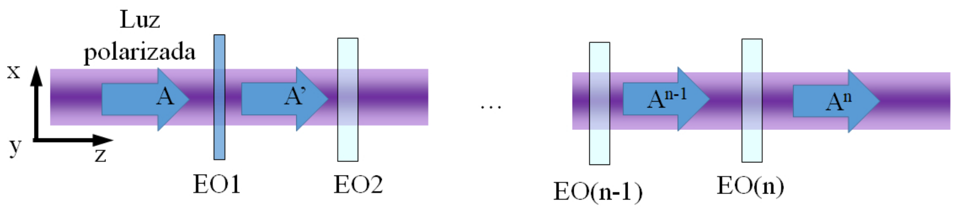

Figure 13: Sistema de n elementos ópticos que tienen matrices de Jones conocidas

Ejercicio: Un sistema óptico que puede modular la intensidad de la luz y mantener un estado de polarización conocido es el que se muestra en la figura 12. Cuál debe ser el estado de polarización a la salida del sistema, si se usa luz incidente linealmente polarizada horizontal, un ángulo θ para el $\lambda/2$ y se analiza a 45^o?

Ejercicio2: Un sistema óptico que sintonizar la intensidad de la luz y mantener un estado de polarización conocido es el que se muestra en la figura 12. Ahora, evaluemos el mismo sistema solo utilizando un polarizador a ángulo variable, donde se evalúa la ley de Malus. Cuál debe ser el estado de polarización a la salida del sistema, si se usa luz incidente linealmente polarizada Vertical, un ángulo θ para el Pol_1 y se analiza a 0^o?

8 Interferencia

El principio de superposición dice que cuando dos o más ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales. Lo que implica que éste principio sea una consecuencia de la linealidad de la ecuación de onda. Esto implica que, dadas dos ondas viajeras que viajan en la misma direción que tienen un desfase entre ellos, la onda resultante puede verse como se ve en figura 14,

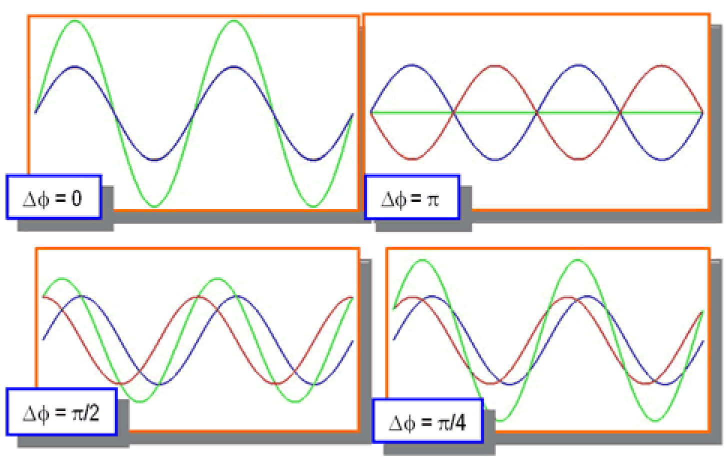

Figure 14: La onda en color verde, es el resultado de la suma algebraica de las ondas azul y roja que depende del desfase $\Delta\phi$

En términos de ondas electromagnéticas, y en particular, en términos del campo eléctrico de una onda plana óptica, consideremos dos ondas **armoónicas planas que viajan en la misma dirección** pero que pueden tener polarizaciones distintas:

$$\mathbf{E}_1(r,t) = E_{01}e^{i(k\cdot r-\omega t+\phi)}, \tag{48}$$

$$\mathbf{E}_2(r,t) = E_{02}e^{i(k\cdot r-\omega t)}, \tag{49}$$

A través del ppio de superposición, el término I de interferencia entre las dos ondas de las ecuaciones 48 y 49, se puede ver como:

$$\mathbf{I} = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2, \tag{50}$$

$$\mathbf{I} = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = |E_{01}e^{i(k\cdot r-\omega t+\phi)} + E_{02}e^{i(k\cdot r-\omega t)}|^2,$$

Esto es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = E_{01}\cdot E_{01} + E_{02}\cdot E_{02} + 2\mathbb{R}e\{\mathbf{E}_1\cdot \mathbf{E}_2^*\} \\
\mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\mathbb{R}e\{E_{01}\cdot E_{02}e^{i(k\cdot r-\omega t+\phi)}e^{-i(k\cdot r-\omega t)}\}
\end{aligned}$$

Reduciendo la ecuación anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\mathbb{R}e\{E_{01}\cdot E_{02}e^{i\phi}\} \qquad (51)\\
\mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\mathbb{R}e\{E_{01}\cdot E_{02}(Cos\phi + iSen\phi)\}
\end{aligned}$$

De acá que se obtiene la parte real de la ecuación anterior:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2E_{01}\cdot E_{02}Cos\phi, \tag{52}$$

La ecuación 52 lleva por nombre "Ecuación de interferencia" y el tercer término se le conoce como "Término de interferencia". Es importante a señalar que para que haya intereferencia entre dos ondas que se cruzan, el tercer término debe ser diferente de cero.

Polarización importante en interferencia

Se sabe que la polarización es importante, entonces se tiene:

- Para $\mathbf{E}_1\|\mathbf{E}_2$.

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}Cos\phi, \tag{53}$$

si $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2I_1Cos\phi = 2I_1(1 + Cos\phi), \tag{54}$$

- Para $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2$ y $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 2I_1, \tag{55}$$

El termino de interferencia en 55 es cero, dado que $\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 = 0$

Ondas armoónicas que viajan en diferentes direcciones

Como se ha visto en clase, la dirección de propagación de una onda la determina el vector k, en este sentido, se tiene las ondas:

$$\mathbf{E}_1(r,t) = E_{01}e^{i(k_1\cdot r-\omega t)}, \tag{56}$$

$$\mathbf{E}_2(r,t) = E_{02}e^{i(k_2\cdot r-\omega t)}, \tag{57}$$

A diferencia del caso anterior, en estÃ© caso partícular, los campos $\mathbf{E}$ son ortogonales al vector de onda k y además, la interferencia solo ocurre en un solo punto, como se muestra en la figura 15.

Por consiguiente, es posible obtener la dirección del vector $\mathbf{k}$ a partir del diagrama en la figura 15. Por lo que el resultado es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k_1} &= \frac{\omega}{c}\hat{s}_1 = \frac{\omega}{c}[Cos\theta\hat{z} - Sen\theta\hat{y}] \qquad (58)\\
\mathbf{k_2} &= \frac{\omega}{c}\hat{s}_2 = \frac{\omega}{c}[Cos\theta\hat{z} + Sen\theta\hat{y}]
\end{aligned}$$

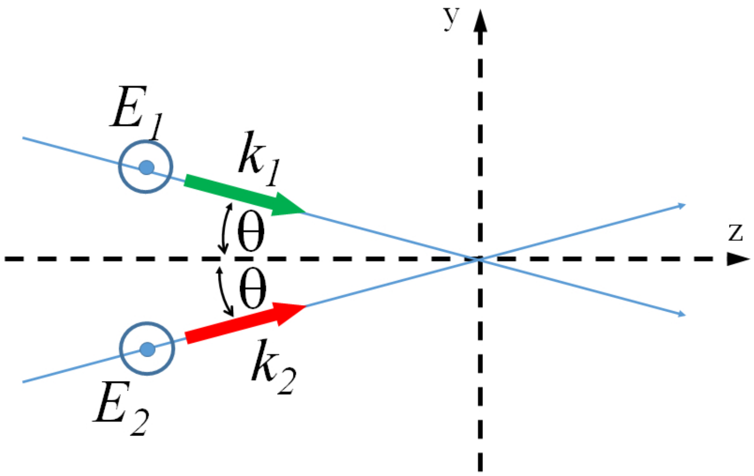

Figure 15: Ondas armónicas con diferente dirección, k_1 y k_2, pero que interfieren en un punto.

Por lo que a través de la ecuación 50,

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\mathbb{R}e\{E_{01}\cdot E_{02}e^{i(k_1\cdot r-\omega t)}e^{-i(k_2\cdot r-\omega t)}\}\\ \mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\mathbb{R}e\{E_{01}\cdot E_{02}e^{i(k_1-k_2)\cdot r}\}\end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned}\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2} &= \frac{\omega}{c}[Cos\theta\hat{z} - Sen\theta\hat{y} + Cos\theta\hat{z} + Sen\theta\hat{y}]\\ \mathbf{k_1}-\mathbf{k_2} &= \frac{-2\omega}{c}Sen\theta\hat{y}\\ \frac{\omega}{c} &= \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

Por consiguiente, la ecuación de interferencia queda como:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}Cos\big(-4\frac{\pi}{\lambda}Sen\theta\hat{y}\big), \tag{59}$$

Ondas armoónicas con diferente frecuencia

En este caso, trabajemos con ω_1 y ω_2, dos frecuencias diferentes para dos ondas viajeras que van en la misma dirección. Para ello, tomemos en cuenta la siguiente identidad trigonométrica

$$Cos(A) + Cos(B) = 2Cos\Big(\frac{A+B}{2}\Big)\Big(Cos\frac{A-B}{2}\Big)$$

En este sentido, el el termino de interferencia estará gobernado por los cosenos siguientes:

$$Cos(\omega_1 t) + Cos(\omega_2 t) = 2Cos\Big(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\Big)Cos\Big(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\Big) \tag{60}$$

En términos de interferencia, las frecuencias deben ser cercanas entre sí. Esto significa que:

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 &= 2\omega\\ \omega_1 - \omega_2 &= \Delta\omega\end{aligned}$$

El resultado es:

$$Cos(\omega_1 t) + Cos(\omega_2 t) = 2Cos(\omega t)Cos\frac{\Delta\omega t}{2} \tag{61}$$

Lo anterior viene de:

$$\mathbf{E}_1(r,t) = E_{01}e^{i(k\cdot r-\omega_1 t)}, \tag{62}$$

$$\mathbf{E}_2(r,t) = E_{02}e^{i(k\cdot r-\omega_2 t)}, \tag{63}$$

De la ecuación 50

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\mathbb{R}e\{E_{01}\cdot E_{02}e^{i(k\cdot r-\omega_1 t)}e^{-i(k\cdot r-\omega_2 t)}\} \\
\mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\mathbb{R}e\{E_{01}\cdot E_{02}e^{i(\omega_1-\omega_2)t}\}
\end{aligned}$$

8.1 Ejercicios interferencia

1. En la figura 16, se muestran los caminos ópticos a traés de un interferómetro de Mach-Zehnder que utiliza como fuente de iluminación un láser de He-Ne ($\lambda = 632.8\,nm$). Los haces pasan por celdas de gas idénticas de $10\,cm$ de longitud, que pueden ser evacuadas o presurizadas de manera independiente. Suponga que la relación $n = 1 + Ap$ entre la presión y el indice de refracción es válida. Inicialmente, las dos celdas están llenas con un gas desconocido a 1 atm de presión. Al evacuar una celda, se observan cambios en intensidad en el detector y se registran un total de 100 mínimos de intensidad. Encuentre la constante de proporcionalidad A en la ecuación $n(P)$.

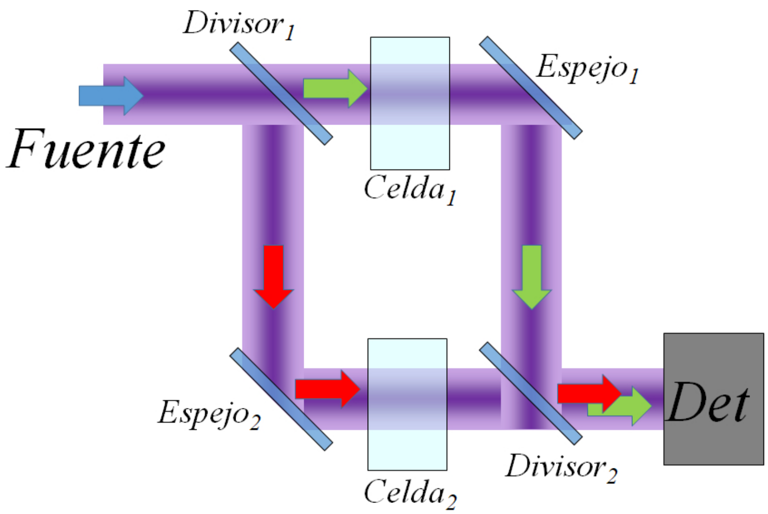

Figure 16: Interferómetro Mach-Zehnder.

2. Considere un arreglo para observar anillos de Newton en el espacio entre una superficie esférica y un plano. Se realiza el experimento con aire entre las superficies. Posteriormente se llena el espacio con líquido y se repite el experimento. Muestre que la razón entre los radios para la franja de un orden en particular es aproximadamente la raíz cuadrada del índice de refracción del líquido.

3. Se utiliza luz blanca (con λ entre 400 y $700\,nm$) para iluminar una mascarilla con dos rendijas separadas por $1.25\,mm$ y se observa el patrón de interferencia en una pantalla a una distancia de $1.5\,m$. A $3\,mm$ de la franja central blanca, se hace un pequeño orificio en la pantalla que servirá como fuente de luz que alimentará a un espectrofotómetro de alta resolución. Â¿En donde esperaría ver líneas oscuras en el espectro de esta fuente?

Interferencia por división del frente de onda

Consideremos que la fuente es una fuente puntual muy distante, por lo que las aberturas por un frente de onda plano. En el sistema descrito en la figura 17, se puede ver la localización de la fuente y siendo A_1 y A_2 dos secciones del frente ***plano*** que llegan a los puntos P_1 y P_2. La distancia entre las aberturas d está dado por la distancia entre los puntos P_1 y P_2. Una vez que el frente de onda A_1 pasa por P_1 se convierte en un nuevo frente de onda, ahora un frente de onda esférico A'_1 y de manera análoga para A'_2. Los valores de l_1 y l_2, son las distancias que van de la doble rendija al punto P en la pantalla para los puntos P_1 y P_2, respectivamente.

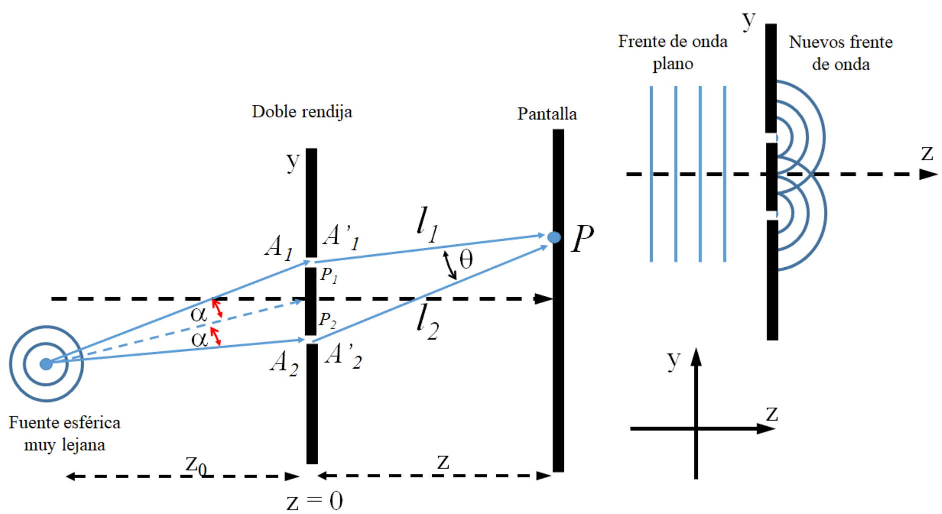

Figure 17: Esquema del experimento de la doble rendija

Entonces, en los puntos P_1 y P_2 antes de la doble rendija:

$$\mathbf{A}_1 = A_0 e^{ik_0(\frac{d}{2}Sen\alpha)} = A_0 e^{i\phi}, \tag{64}$$

y

$$\mathbf{A}_2 = A_0 e^{-ik_0(\frac{d}{2}Sen\alpha)} = A_0 e^{-i\phi}, \tag{65}$$

Dado que el frente de onda cambia de plano a esférico, cada nuevo frente de onda A'_1 y A'_2 lo podemos escribir como:

$$\mathbf{A'}_1 = \frac{kA_1 e^{ik|r-r_1|}}{|\ r - r_1\ |}, \tag{66}$$

y

$$\mathbf{A'}_2 = \frac{kA_2 e^{ik|r-r_2|}}{|\ r - r_2\ |}, \tag{67}$$

Al estudiar sobre el punto P en la pantalla, aplicamos el principio de superposición.

$$\mathbf{A} = A'_1(P) + A'_2(P) = \frac{kA_1 e^{ik_0 l_1}}{l_1} + \frac{kA_2 e^{ik_0 l_2}}{l_2}, \tag{68}$$

El patrón de interferencia es:

$$\mathbf{I} = \frac{|\ k\ |^2 |\ A_1\ |^2}{|\ l_1\ |^2} + \frac{|\ k\ |^2 |\ A_2\ |^2}{|\ l_2\ |^2} + 2\mathbb{R}e\Big\{\frac{kA_1 e^{ik_0 l_1}}{l_1}\frac{k^* A_1^* e^{-ik_0 l_2}}{l_2}\Big\}, \tag{69}$$

Tomando en cuenta que $l_1 \simeq l_2 \simeq z$; y además $z \gg d$, entonces se puede escribir a I de la ecuación 69 como:

$$\mathbf{I} = \frac{2\ |\ k\ |^2\ I_0}{z^2} + \frac{2\ |\ k\ |^2\ I_0}{z^2}\mathbb{R}e\Big\{e^{i[k_0(l_1-l_2)+2\phi]}\Big\},$$

En la pantalla...

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{z^2 + (\frac{d}{2} - y)^2} \\ l_2 &= \sqrt{z^2 + (\frac{d}{2} + y)^2} \end{aligned}$$

Del argumento de la exponencial en la ecuación 70,

$$\begin{aligned}\Delta l &= l_1 - l_2 = \frac{{l_1}^2 - {l_2}^2}{l_1 + l_2} \\ \Delta l &= -\frac{yd}{z}\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación 70 queda como:

$$\mathbf{I} = \frac{2\mid k\mid^2 I_0}{z^2}\Big[1 + Cos\big(k_0\frac{yd}{z} - 2\phi\big)\Big],$$

Reduciendo la ecuación 70,

$$\mathbf{I} = I_0'\Big[1 + Cos\big(k_0\frac{yd}{z}\big)\Big], \tag{70}$$

Para encontrar los máximos y mínimos de la ecuación 70, el argumento del coseno debe ser igual a:

$$\begin{aligned}\texttt{Mínimos (I=0)} &= \frac{\pi}{2}\big(m+1\big) \\ \texttt{Máximos (I=1)} &= 2m\pi\end{aligned}$$

con $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

9 Difracción

Propagación de la amplitud compleja en el espacio libre

Propagación de una onda con amplitud compleja propagándose a lo largo de z.

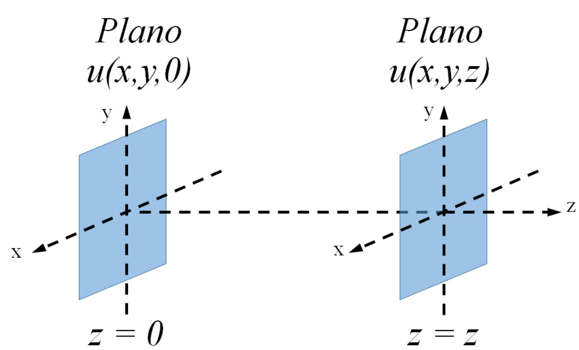

Figure 18: Propagación de una onda plana de z = 0 al plano z=z

Descripción de una función de onda plana monocromática.

$$\begin{aligned}U(x,y,z,t) &= U(x,y,z)e^{-i\omega t} \\ \omega &= 2\pi\nu\end{aligned}$$

Por lo que, para cada parte del frente de onda en los diferentes planos sobre el eje z, se puede ver como:

$$\begin{aligned}F(f_x,f_y,0) &= \mathfrak{F}\{U(x,y,0)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,y,0)e^{-i2\pi(f_xX+f_yY)}dxdy \\ F(f_x,f_y,z) &= \mathfrak{F}\{U(x,y,z)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,y,z)e^{-i2\pi(f_xX+f_yY)}dxdy\end{aligned}$$

Siendo $\mathfrak{F}$, la transformada de Fourier de la función de amplitud compleja U.

Como la amplitud compleja, U, obedece a la ecuación de Hemholtz (una solución unidireccional a la ecuación de onda), tenemos que:

$$\nabla^2 U(x,y,z) + k^2 U(x,y,z) = 0, \tag{71}$$

tomando en cuenta que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

Esto implica que se debe aplicar la ecuación de Hemholtz a la funcioón U, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y,z)e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}df_x df_y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y,z)\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}\Big]df_x df_y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y,z)\Big[-4\pi^2 {f_x}^2 e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}\Big]df_x df_y
\end{aligned}$$

Análogamente con y,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y,z)e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}df_x df_y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y,z)\Big[\frac{\partial^2}{\partial y^2}e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}\Big]df_x df_y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y,z)\Big[-4\pi^2 {f_y}^2 e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}\Big]df_x df_y
\end{aligned}$$

Para completar con la ecuación de Hemholtz, se necesita encontrar la dependencia de U respecto a z. En este sentido, la variable solo estÃ¡ presente en la función F y no en la exponencial. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y,z)e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}df_x df_y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\partial^2}{\partial z^2}F(f_x,f_y,z)\Big]e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}df_x df_y
\end{aligned}$$

Por otro lado, con el término restante de la ecuación 71, tenemos lo siguiente:

$$k^2 U(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k^2 F(f_x,f_y,z)e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}df_x df_y$$

Con estos resultados, la ecuación 71, queda como:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\partial^2}{\partial z^2}F(f_x,f_y,z) - \big(4\pi^2{f_x}^2 + 4\pi^2{f_y}^2\big)F(f_x,f_y,z) + k^2F(f_x,f_y,z)\Big]e^{i2\pi(f_xX+f_yY)}df_x df_y = 0$$

La ecuación anterior se puede ver como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2}F + \big(k^2 - k^2\lambda^2{f_x}^2 - k^2\lambda^2{f_y}^2\big)F &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}F + k^2\big(1 - \lambda^2{f_x}^2 - \lambda^2{f_y}^2\big)F &= 0
\end{aligned}$$

tomando en cuenta que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad k^2\lambda^2 = 4\pi^2, \qquad \text{y} \qquad F = F(f_x,f_y,z),$$

Reestructurando...

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}F + a^2F = 0 \qquad \text{con} \qquad a^2 = k^2\big(1 - \lambda^2{f_x}^2 - \lambda^2{f_y}^2\big),$$

Las soluciones a la ecuación diferencia de orden 2 como función de a, son:

$$F = F(f_x, f_y, z) = \beta e^{iaz}, \qquad \text{con} \qquad \beta = cte,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} F = (ia)^2 \beta e^{iaz} = -a^2 \beta e^{iaz} = -a^2 F,$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales, $z = 0$

$$F(f_x, f_y, 0) = \beta,$$

$$F(f_x, f_y, z) = F(f_x, f_y, 0) e^{ik\left(\sqrt{1-\lambda^2 {f_x}^2 - \lambda^2 {f_y}^2}\right)z}, \tag{72}$$

La ecuación 72 lleva por nombre aproximación cuadrática y si además usamos una serie de Taylor para aproximar la expresión que está dentro de la raiz, la ecuación en cuestión queda como:

$$F(f_x, f_y, z) = F(f_x, f_y, 0) e^{ik} e^{-i\pi\lambda z({f_x}^2 + {f_y}^2)}, \tag{73}$$

La ecuación 73, es la aproximación para frecuencias bajas.

Anexo 1: Ejercicios Ondas

1. Determine y compruebe si las siguientes expresiones son funciones de onda.

$$\psi(x,t) = Acos^2\Big(2\pi(t - x^2)\Big), \tag{74}$$

$$\psi(r,t) = Aexp\Big(k(\alpha x + \beta y + \gamma z) - 2\omega t\Big), \qquad en\, y \tag{75}$$

$$\psi(x,t) = A - Acos^2\Big(3x - 4\omega t\Big), \tag{76}$$

2. Si asumimos que los campos son ondas planas, la forma algebraica de las ecuaciones de Maxwell para un medio lineal, homogéneo y anisotrópico es:

$$\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{H} = -\omega \overrightarrow{D},$$

y

$$\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{E} = \omega \overrightarrow{B},$$

donde $\overrightarrow{B}$ se relaciona con $\overrightarrow{H}$ y $\overrightarrow{D}$ con $\overrightarrow{E}$ de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}) = \omega \overrightarrow{B}, \qquad \overrightarrow{D} = \varepsilon_0(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}).$$

Para estos materiales, la polarización $\overrightarrow{P}$ no es colineal con $\overrightarrow{E}$ y por tanto $\overrightarrow{D}$ tampoco es colineal con el campo eléctrico. Suponiendo un medio dieléctrico con $\overrightarrow{M} = 0$, pero sin restricciones para $\overrightarrow{D}$ y $\overrightarrow{E}$.

Muestre que el vector $\overrightarrow{k}$ siempre apunta en la dirección de $\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}$. Qué significado tiene esto?

Nota: Las siguientes identidades vectoriales pueden ser de utilidad.

$$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$$

y

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c},$$

3. Un polarizador circular que discrimine luz circularmente polarizada izquierda $[1; i]$, de luz circularmente polarizada derecha $[1; -i]$, se construye una placa $\lambda/4$ con su eje rápido horizontal seguida de un polarizador lineal a 45^o con la horizontal. Encontrar que le hace este arreglo óptico a ambos tipos de luz circularmente polarizada. Qué modificaciones se tendrían que hacer en el polarizador para tener el efecto inverso (es decir, que la otra polarización se bloquee)?. Nota: debe usar e investigar las matrices de jones de la placa $\lambda/4$

4. Describe el estado de polarización de $\overrightarrow{E} = \hat{i}E_0 sen(\omega t - kz) + \hat{j}E_0 sen(\omega t - kz - \pi/2)$ Qué figura geométrica se describe?

Anexo 2: Ejercicios Interferencia y difracción

1. Encuentre la expresión de interferencia, I, para una rendija de tres aberturas en un experimento análogo al experimento de **Young**. La separación entre las aberturas más separadas es d y la pantalla se encuentra a una distancia z de la rendija.

2. Considere un arreglo para observar anillos de Newton en el espacio entre una superficie esférica y un plano. Se realiza el experimento con aire entre las superficies. Posteriormente se llena el espacio con líquido y se repite el experimento. Muestre que la razón entre los radios para la franja de un orden en particular es aproximadamente la raíz cuadrada del índice de refracción del líquido.

3. Se utiliza luz blanca (con λ entre 400 y 700 nm) para iluminar una mascarilla con dos rendijas separadas por 1.25 mm y se observa el patrón de interferencia en una pantalla a una distancia de 1.5 m. A 3 mm de la franja central blanca, se hace un pequeño orificio en la pantalla que servirá como fuente de luz que alimentará a un espectrofotómetro de alta resolución. Â¿En donde esperaría ver líneas oscuras en el espectro de esta fuente?

4. Calcule el patrón de difracción de la abertura mostrada en la siguiente figura 9. Determine la gráfica ilustrando lo que tendría a lo largo del eje x_0 para $y_0 = 0$ y $L \gg l_x, d$. **Nota**: por comodidad use la propiedad de convolución entre una delta de dirac y una función rect y el principio de Babinet para difracción.